2013年全国高中数学联合竞赛试题
一试

一、填空题（本大题共8小题，每小题8分，共64分）

1. 设集合 $A=\{2,0,1,3\}$，集合 $B=\{x\mid -x\in A,\ 2-x^2\notin A\}$．则集合 B 中所有元素的和为__________．

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A、B 在抛物线 $y=4x$ 上，满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$，$F$ 是抛物线的焦点，则 $S_{\triangle OFA}\cdot S_{\triangle OFB}=$__________．

3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin A=10\sin B\sin C$，$\cos A=10\cos B\cos C$，则 $\tan A$ 的值为__________．

4. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 底面边长为1，高为 $\sqrt{2}$，则其内切球半径为__________．

5. 设 a,b 为实数，函数 $f(x)=ax+b$ 满足：对任意 $x\in[0,1]$，有 $|f(x)|\le 1$．则 ab 的最大值为__________．

6. 从 $1,2,\cdots,20$ 中任取5个不同的数，其中至少有两个是相邻数的概率为__________．

7. 若实数 x,y 满足 $x-4\sqrt{y}=2\sqrt{x-y}$，则 x 的取值范围是__________．

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 共有9项，其中 $a_1=a_9=1$，且对每个 $i\in\{1,2,\cdots,8\}$，均有 $\frac{a_{i+1}}{a_i}\in\left\{2,1,-\frac{1}{2}\right\}$，则这样的数列的个数为__________．

二、解答题（3小题，共56分）

9. （本题满分16分）给定正数数列 $\{x_n\}$ 满足 $S_n\ge 2S_{n-1},n=2,3\cdots$，这里 $S_n=x_1+\cdots+x_n$．证明：存在常数 $C>0$，使得

$$x_n\ge C\cdot 2^n,n=1,2,\cdots.$$

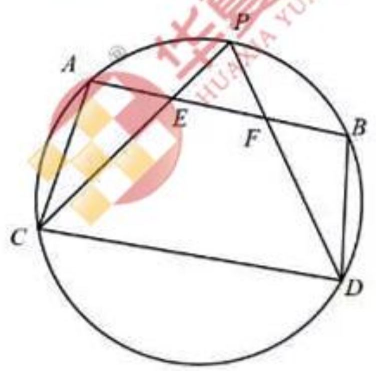
10. （本题满分20分）在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A_1,A_2$ 分别为椭圆的左、右顶点，F_1,F_2 分别为椭圆的左、右焦点，P 为椭圆上不同于 A_1 和 A_2 的任意一点．若平面中两个点 Q、R 满足 $QA_1\perp PA_1$，$QA_2\perp PA_2$，$RF_1\perp PF_1$，$RF_2\perp PF_2$，试确定线段 QR 的长度与 b 的大小关系，并给出证明．

11. （本题满分 20 分）求所有的正实数对 (a,b)，使得函数 $f(x)=ax^2+b$ 满足：对任意实数 x,y，有

$$f(xy)+f(x+y)\ge f(x)f(y).$$

加试

一、（本题满分 40 分）如图，AB 是圆 ω 的一条弦，P 为弧 AB 内一点，E、F 为线段 AB 上两点，满足 $AE=EF=FB$，连线 PE、PF 并延长，与圆 ω 分别交于点 C、D，求证：$EF\cdot CD=AC\cdot BD$



二、（本题满分 40 分）给定正整数 u,v．数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_1=u+v$，对整数 $m\ge 1$，$\begin{cases} a_{2m}=a_m+u \\ a_{2m+1}=a_m+v \end{cases}$

记 $S_m=a_1+a_2+\cdots+a_m\,(m=1,2,\cdots)$．证明：数列 $\{S_m\}$ 中有无穷多项是完全平方数．

三、（本题满分 50 分）一次考试共有 m 道试题，n 个学生参加，其中 $m,n\ge 2$ 为给定的整数，每道题的得分规则是：若该题恰有 x 个学生没有答对，则每个答对该题的学生得 x 分，未答对的学生得零分．每个学生的总分为其 m 道题的得分总和，将所有学生总分从高到低排列为 $p_1\ge p_2\ge\cdots\ge p_n$，求 p_1+p_n 的最大可能值．

四、（本题满分 50 分）设 n,k 为大于 1 的整数，$n<2^k$．证明：存在 $2k$ 个不被 n 整除的整数，若将它们任意分成两组，则总有一组有若干个数的和被 n 整除．