2014 年全国高中数学联合竞赛试题（A 卷）

一试

一、填空题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

1. 若正数 a,b 满足 $2+\log_2 a=3+\log_3 b=\log_6(a+b)$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的值为________.

2. 设集合 $\left\{\dfrac{3}{a}+b \,\middle|\, 1\le a\le b\le 2\right\}$ 中的最大元素与最小你别为 M,m，则 $M-m$ 的值为______.

3. 若函数 $f(x)=x^2+a|x-1|$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是______.

4. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{2(n+2)}{n+1}a_n\left(n\in N^*\right)$，则 $\dfrac{a_{2014}}{a_1+a_2+\cdots+a_{2013}}=$______.

5. 正四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面是边长为 1 的正三角形，M,N 分别是边 AB,BC 的中点，则异面直线 MN 与 PC 之间的距离是________.

6. 设椭圆 Γ 的两个焦点是 F_1,F_2，过点 F_1 的直线与 Γ 交于点 P,Q．若 $|PF_2|=|F_1F_2|$，且 $3|PF_1|=4|QF_1|$，则椭圆 Γ 的短轴与长轴的比值为________.

7. 设等边三角形 ABC 的内切圆半径为 2，圆心为 I．若点 P 满足 $PI=1$，则 $\triangle APB$ 与 $\triangle APC$ 的面积之比的最大值为________.

8. 设 A,B,C,D 是空间中四个不共面的点，以 $\dfrac{1}{2}$ 的概率在每对点之间连一条边，任意两点之间是否连边是相互独立的，则 A,B 之间可以用空间折线（一条边或者若干条边组成）连结的概率为________.

二、解答题（本大题共 3 小题，共 56 分）

9. （本题满分 16 分）平面直角坐标系 xOy 中，P 是不在 x 轴上的一个动点，满足条件：过 P 可作抛物线 $y^2=4x$ 的两条切线，两切点连线 l_P 与 PO 垂直．设直线 l_P 与直线 PO、x 轴的交点分别为 Q,R．

（1）证明：R 是一个定点；

（2）求 $\dfrac{|PQ|}{|QR|}$ 的最小值．

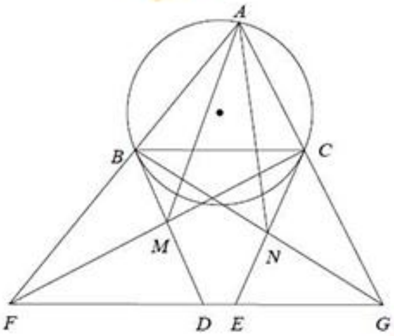
10. （本题满分 20 分）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{\pi}{6}$，$a_{n+1}=\arctan(\sec a_n)\left(n\in N^*\right)$．求正整数 m，使得 $\sin a_1\cdot\sin a_2\cdot\cdots\cdot\sin a_m=\dfrac{1}{100}$．

11. （本题满分 20 分）确定所有的复数α，使得对任意复数$z_1, z_2\left(|z_1|,|z_2|<1, z_1\neq z_2\right)$，均有
$(z_1+\alpha)^2+\alpha\overline{z_1}\neq(z_2+\alpha)^2+\alpha\overline{z_2}$.

二试

一、（本题满分 40 分）设实数a,b,c满足$a+b+c=1$，$abc>0$．求证：$ab+bc+ca<\frac{\sqrt{abc}}{2}+\frac{1}{4}$.

二、（本题满分 40 分）如图，在锐角三角形ABC中，$\angle BAC\neq 60^\circ$，过点B,C分别作三角形ABC的外接圆的切线BD,CE，且满足$BD=CE=BC$．直线DE与AB,AC的延长线分别交于点F,G．设CF与BD交于点M，CE与BG交于点N．证明：$AM=AN$.



三、（本题满分 50 分）设$S=\{1,2,3,\cdots,100\}$．求最大的整数k，使得S有k个互不相同的非空子集，具有性质：对这k个子集中任意两个不同子集，若它们的交非空，则它们交集中的最小元素与这两个子集中的最大元素均不相同.

四、（本题满分 50 分）设整数$x_1,x_2,\cdots,x_{2014}$模 2014 互不同余，整数$y_1,y_2,\cdots,y_{2014}$模 2014 也互不同余．证明：可将$y_1,y_2,\cdots,y_{2014}$重新排列为$z_1,z_2,\cdots,z_{2014}$，使得$x_1+z_1,x_2+z_2,\cdots,x_{2014}+z_{2014}$模 4028 互不同余.