2015年全国高中数学联合竞赛试题（A卷）
一试

一、填空题（本大题共8小题，每小题8分，共64分）

1. 设a,b为不相等的实数，若二次函数$f(x)=x^2+ax+b$满足$f(a)=f(b)$，则$f(2)=$________.

2. 若实数α满足$\cos\alpha=\tan\alpha$，则$\dfrac{1}{\sin\alpha}+\cos^4\alpha=$________.

3. 已知复数数列$\{z_n\}$满足$z_1=1,\ z_{n+1}=\overline{z_n}+1+ni\ (n=1,2,\cdots)$，则$z_{2015}=$________.

4. 在矩形$ABCD$中，$AB=1,AD=2$，边DC上（包含两端点）的动点P与CB延长线上（包含B）的动点Q满足$|\overrightarrow{DP}|=|\overrightarrow{BQ}|$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}$的最小值为________.

5. 正方体中随机取3条棱，它们两两异面的概率为________.

6. 在平面直角坐标系中，点集$K=\{(x,y)\mid(|x|+|3y|-6)(|3x|+|y|-6)\le 0\}$对应的平面区域的面积为________.

7. ω为实数，若存在$a,b\ (\pi\le a<b\le 2\pi)$，使得$\sin\omega a+\sin\omega b=2$，则$\omega$的取值范围为________.

8. 四位数$\overline{abcd}\ (1\le a\le 9,0\le b,c,d\le 9)$，若$a>b,b<c,c>d$则称四位数为$P$类数；若$a<b,b>c,c<d$则称四位数为$Q$类数．用$N(P),N(Q)$分别表示两类数的个数，则$N(P)-N(Q)=$________.

二、解答题（本大题共3小题，共56分）

9. （本题满分16分）若实数a,b,c满足$2^a+4^b=2^c,4^a+2^b=4^c$，求c的最小值．

10. （本题满分20分）设a_1,a_2,a_3,a_4是4个有理数，使得$\{a_ia_j\mid 1\le i<j\le 4\}=\left\{-24,-2,-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{8},1,3\right\}$，求$a_1+a_2+a_3+a_4$的值．

11. （本题满分20分）在平面直角坐标系中，F_1,F_2分别是椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的左右焦点．设不经过焦点F_1的直线l与椭圆交于两个不同的点A,B，焦点F_2到直线l的距离为d，如果直线AF_1,l,BF_1的斜率依次成等差数列，求d的取值范围．

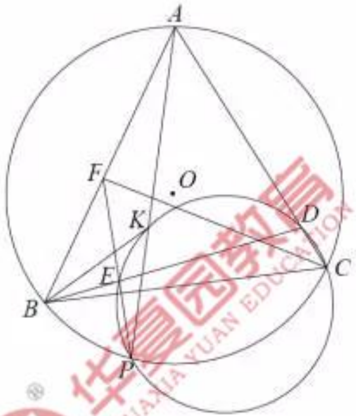
华夏园教育 HUAXIA YUAN EDUCATION

二试

一、（本题满分 40 分）设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\,(n\geq 2)$ 为实数，证明：可以选取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\in\{1,-1\}$，使得
$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i a_i\right)^2\leq (n+1)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right).$$

二、（本题满分 40 分）设 $S=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，其中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个互不相同的有限集合（$n\geq 2$），满足对任意 $A_i,A_j\in S$，均有 $A_i\cup A_j\in S$．若 $k=\min\limits_{1\leq i\leq n}|A_i|\geq 2$，证明：存在 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，使得 x 属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的至少 $\frac{n}{k}$ 个集合．

三、（本题满分 50 分）如图，$\triangle ABC$ 内接于圆 O，P 为弧 BC 上一点，点 K 在线段 AP 上，使得 BK 平分 $\angle ABC$．过 K,P,C 三点的圆 Ω 与边 AC 交于点 D，连结 BD 交圆 Ω 于点 E，连结 PE 并延长与边 AB 交于 F．证明：$\angle ABC=2\angle FCB$．



四、（本题满分 50 分）求所有具有下述性质的正整数 k：对任意正整数 n，$2^{(k-1)n+1}$ 不整除 $\frac{(kn)!}{n!}$．