2016年全国高中数学联合竞赛试题（A卷）
一试

一、填空题（本大题共8小题，每小题8分，共64分）

1. 设实数 a 满足 $a<9a^3-11a<|a|$，则 a 的取值范围是______.

2. 设复数 z、w 满足 $|z|=3$，$(z+\overline{w})(\overline{z}-w)=7+4i$，其中 i 是虚数单位，$\overline{z},\overline{w}$ 分别表示 z,w 的共轭复数，则 $(z+2\overline{w})(\overline{z}-2w)$ 的模为______.

3. 正实数 u,v,w 均不等于1，若 $\log_u vw+\log_v w=5$，$\log_v u+\log_w v=3$，则 $\log_w u$ 的值为______.

4. 袋子A中装有2张10元纸币和3张1元纸币，袋子B中装有4张5元纸币和3张1元纸币．现随机从两个袋子中各取出两张纸币，则A中剩下的纸币面值之和大于B中剩下的纸币面值之和的概率为______.

5. 设 P 为一圆锥的顶点，A、B、C 是其底面圆周上的三点，满足 $\angle ABC=90^\circ$，M 为 AP 的中点．若 $AB=1$，$AC=2$，$AP=\sqrt{2}$，则二面角 $M-BC-A$ 的大小为______.

6. 设函数 $f(x)=\sin^4\frac{kx}{10}+\cos^4\frac{kx}{10}$，其中 k 是一个正整数．若对任意实数 a，均有 $\{f(x)\,|\,a<x<a+1\}=\{f(x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$，则 k 的最小值为________.

7. 双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，左、右焦点分别为 F_1,F_2，过点 F_2 作一直线与双曲线 C 的右半支交于点 P、Q，使得 $\angle F_1PQ=90^\circ$，则 $\triangle F_1PQ$ 的内切圆半径是______.

8. 设 a_1,a_2,a_3,a_4 是1~100中的4个互不相同的数，满足 $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(a_2^2+a_3^2+a_4^2)=(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4)^2$，则这样的有序数组 (a_1,a_2,a_3,a_4) 的个数为______.

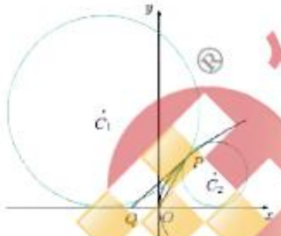
二、解答题（本大题共3小题，共56分）

9. （本题满分16分）在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，求 $\sin C$ 的最大值.

10. （本题满分 20 分）已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$f(1)=1$，且对任意 $x<0$，均有 $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=xf(x)$．

求 $f(1)f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{99}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)f\left(\frac{1}{98}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{50}\right)f\left(\frac{1}{51}\right)$ 的值．

11. 如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，F 是 x 轴正半轴上的一个动点，以 F 为焦点、O 为顶点作抛物线 C，设 P 是第一象限内 C 上的一点，Q 是 x 轴负半轴上一点，使得 PQ 为 C 的切线，且 $|PQ|=2$，圆 C_1、C_2 均与直线 OP 相切于点 P，且均与 x 轴相切，求点 F 的坐标，使圆 C_1 与 C_2 的面积之和取到最小值．

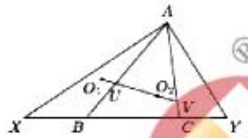


二试

一、（本题满分 40 分）设实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2016}$ 满足 $9a_i>11a_{i+1}^2$（$i=1,2,\cdots,2015$）.

求 $\left(a_1-a_2^2\right)\left(a_2-a_3^2\right)\cdots\left(a_{2015}-a_{2016}^2\right)\left(a_{2016}-a_1^2\right)$ 的最大值.

二、（本题满分 40 分）如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，X、Y 是直线 BC 上两点（X、B、C、Y 顺次排列），使得 $BX\cdot AC=CY\cdot AB$．设 $\triangle ACX$、$\triangle ABY$ 的外心分别为 O_1，O_2，直线 O_1O_2 分别与 AB、AC 交于点 U、V．证明：$\triangle AUV$ 是等腰三角形.



三、（本题满分 50 分）给定空间中 10 个点，其中任意四点不在一个平面上，将某些点之间用线段相连，若得到的图形中没有三角形也没有空间四边形，试确定所连线段数目的最大值.

四、（本题满分 50 分）设 p 与 $p+2$ 均是素数，$p>3$．数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1=2$，$a_n=a_{n-1}+\left\lceil\frac{pa_{n-1}}{n}\right\rceil$，$n=2,3,\cdots$．这里 $\lceil x\rceil$ 表示不小于实数 x 的最小整数．证明：对 $n=3,4,\cdots,p-1$ 均有 $n\mid pa_{n-1}+1$.